SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Bruno Franchi

PESI FORTEMENTE A_∞ E DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV-POINCARE'

16 gennaio 1992

1. In questo seminario intendo presentare alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con C. Gutierrez e R. Wheeden ([FGW]) sulla disuguaglianza di Sobolev-Poincaré con pesi. Più esattamente, ci si interessa al seguente problema (per altro largamente studiato: vi vedano, ad es., [FL1], [F], [FKS], [CW], [SW], [CRS], [DS],...): assegnate in $\mathbf{R}^n$ $n+2$ funzioni nonnegative e localmente sommabili $w, \omega_0, \omega_1, \dots \omega_n$, si vuole provare una disuguaglianza del tipo

$$\left(\fint_A |u|^q \,\omega_0 \,dx\right)^{1/q} \leq C_A \sum_{j=1}^{n} \left(\fint_A \omega_j \,|\partial_j u|^p \,w \,dx\right)^{1/p} \tag{1.a}$$

per tutte le $u \in \mathrm{Lip}_0(A)$ a media nulla su A, dove $p \geq 1, q = q(p) \geq p$ e A appartiene a una opportuna famiglia di sottoinsiemi. Per inquadrare i risultati ottenuti, ricordo brevemente alcuni risultati precedenti. Se $w \equiv \omega_0 \equiv \omega_1 \equiv \dots \equiv \omega_n \equiv 1$, la (1.a) è la classica disuguaglianza di Sobolev-Poincaré soddisfatta per $A = B(x,r)$, $q = pn/(n-p)$ se $p < n$. Nel caso degenere, abbiamo due tipi di risultati:

(i) se $\omega_1 \equiv \dots \equiv \omega_n \equiv 1$, la (1.a) è stata provata per le sfere euclidee e q opportuno in [FKS] se $\omega_0 = w$ appartiene alla classe A_p di Muckenhoupt, e, in generale se $\omega_0 \neq w$ in una serie di lavori([CW], [SW], [W]). Probabilmente, i risultati ottimali sono quelli contenuti in [SW] e [W]. Ricordiamo anche che, per $n = 1$ e $w = \omega_0$, la (1.a) è stata completamente caratterizzata in [T];

(ii) se $\omega_1, \dots \omega_n$ non sono necessariamente uguali, sotto opportune ipotesi è possibile associare ad esse una distanza ρ ([FL1], [NSW]) e provare la (1.a) per le sfere $B_\rho(x,r)$ di questa metrica: si vedano, ad esempio, [FL1], [FS], [F], [J]. L'idea fondamentale di [FS] è l'osservazione che le degenerazioni di tipo (i) e (ii) sono sostanzialmente indipendenti, essendo l'una una degenerazione della misura, mentre l'altra è una degenerazione della metrica. Quindi è naturale pensare di sovrapporre i due fenomeni, se $w = \omega_0$ e $\omega_1, \dots, \omega_n$ soddisfano le condizioni di [FL1] o, più in generalese la coppia (ω, w) soddisfa condizioni del tipo di quelle di [CW]: si vedano [FS] e [S].

Il lavoro [FGW] nasce dallo studio di un precedente lavoro di David e Semmes [DS] dove gli autori introducono il concetto di pesi fortemente A_∞ provando una disuguaglianza isoperimetrica e una disuguaglianza di Poincaré. Darò più avanti, nel nostro contesto, una definizione di pesi fortemente A_∞ (s-A_∞); vorrei però qui illustrare le motivazioni del nostro interesse. Ricordiamo che in [DS] siamo in una situazione del tipo (i).

(1) È noto che $\omega \in A_\infty$ se e solo se $\omega \in A_r$ per qualche $r \geq 1$. D'altra parte, se $\omega \in A_r$, è possibile provare la (1.a) solo per $p \geq r$, mentre, scelta ad esempio $\omega(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$ (che appartiene ad A_r solo per r grande se α è grande), la (1.a) vale per ogni $p \geq 1$. Questo significa che $|x|^\alpha$ ha qualcosa in più rispetto ai pesi A_r; questo qualcosa può essere visto in termini di mappe quasi-conformi (come in [FKS]), o in termini più metrici, provando che è un peso s-A_∞. In qualche modo (ma tutto ciò è molto vago e impreciso), i pesi A_r possono avere zeri distribuiti su insiemi di codimensione grande, ma non troppo *forti* come ordine di annullamento. Al contrario, un peso s-A_∞ ha zeri forti ma molto concentrati (ad esempio tali pesi non possono degenerare su curve). Questa osservazione, insieme al fatto che per

tali pesi vale una disuguaglianza isoperimetrica, li indica come candidati ad essere la misura ambiente, che gioca il ruolo della misura di Lebesgue.

(2) La tecnica di dimostrazione di [DS] è del tutto diversa da quella dei risultati precedenti. In sostanza, si tratta di applicare il teorema di Stokes a opportune funzioni costruite in modo metrico. Poichè non viene utilizzata nessuna integrazione lungo linee, è ragionevole aspettarsi che possa essere adattata ad operatori anisotropi del tipo di quelli in [FL1], [FS], [F], sotto ipotesi più deboli.

2. Entriamo ora nei dettagli dei risultati. Limitiamoci al caso $n = 2$.

(I) *Pesi* s-A_∞ *per una metrica.* In $\mathbf{R}^2$ consideriamo due campi di vettori ∂_1, $\lambda_2(x)\partial_2$, dove λ_2 è una funzione nonnegativa, localmente Lipschitziana e che soddisfa la seguente proprietà: per ogni intervallo $I \subset \mathbf{R}$, per ogni $x_2 \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\sup_{x_1 \in I} \lambda_2(x_1, x_2) \leq c \fint_I \lambda_2(t, x_2)\, dt. \tag{2.a}$$

Questa proprietà è stata studiata in [F] ed equivale ad una proprietà isoperimetrica delle sfere $B_\rho(x, r)$ associate ai campi vettoriali $\partial_1, \lambda_2(x)\partial_2$ come in [FL] (si veda anche [FG]). Nel seguito ometteremo l'indice ρ in quanto riterremo fissata la metrica.

Sia ora ω un peso A_∞ per la metrica ρ; assumiamo cioè (è una delle definizioni possibili) che esista $p \geq 1$ tale che $\omega \in A_p(\mathbf{R}^2, \rho, dx)$, cioè che

$$\sup_{x,r} \fint_{B(x,r)} \omega\, dz \left(\fint_{B(x,r)} \omega^{-1/(p-1)}\, dz \right)^{p-1} \leq c_p(\omega) \tag{2.b}$$

(una teoria dei pesi $A_p(\mathbf{R}^2, \rho, dx)$ ha senso per [C] poichè $(\mathbf{R}^2, \rho, dx)$ è uno spazio di tipo omogeneo a causa di (2.a): v. [F]).

Se $x, y \in \mathbf{R}^2$, poniamo

$$\delta(x, y) = \inf \left(\fint_B \omega \lambda_2\, dz \right)^{1/2}, \tag{2.c}$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le sfere B della metrica ρ tali che $x, y \in B$ e $r(B) \leq 2\rho(x, y)$. A questo punto , se γ è una curva continua in $\mathbf{R}^2$ parametrizzata su $[0, 1]$, definiamo

$$\omega - \text{lunghezza di } \gamma = \liminf_{|\sigma| \to 0} \sum_i \delta(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)), \tag{2.d}$$

dove $\sigma = \{t_1, \ldots, t_n\}$ è una partizione finita di $[0, 1]$. Possiamo ora definire una nuova distanza $d(x, y)$ come l'estremo inferiore delle ω-lunghezze delle curve che congiungono x e y.

Se $d(x, y) \sim \delta(x, y)$, diremo che $\omega \in$ s-A_∞.

Osservazione 1 (non banale). Le costanti appartengono a s-A_∞. La prova è piuttosto laboriosa e utilizza il fatto, provato in [FL2], che per quasi ogni x, y le geodetiche tra x e y (per ρ) sono curve $\mathbf{C}^1$ che soddiafano un sistema hamiltoniano.

Osservazione 2. Se $\lambda_2 \equiv 1$, esempi di pesi s-A_∞ sono contenuti in [DS] e [S]. È inoltre evidente che, per definizione, un peso s-A_∞ non può degenerare su una curva γ.

Osservazione 3. Se P è un punto fissato di $\mathbf{R}^2$, allora $\omega(x) = \rho(P,x)^\alpha$ ($\alpha > 0$) è un peso s-A_∞.

Premettiamo ora alcune definizioni e alcuni richiami. Poniamo ($x = (x_1, x_2)$):

$$\Lambda_1(x,t) = 1, \quad \Lambda_2(x,t) = \fint_0^t \lambda_2(x_1+s, x_2)\, ds; \tag{2.1}$$

$$F_1(x,t) = t, \quad F_2(x,t) = \int_0^t \lambda_2(x_1+s, x_2)\, ds. \tag{2.2}$$

Sappiamo ([F]) che esiste $\alpha > 0$ tale che:

$$F_2(x,\theta t) \geq \theta^\alpha F_2(x,t) \text{ per } t > 0, \theta \in (0,1); \tag{2.3}$$

$$F_2(x,\theta t) \leq c\,\theta F_2(x,t) \text{ per } t > 0, \theta \in (0,1); \tag{2.4}$$

se $P, Q \in \mathbf{R}^2$, $\rho(P,Q) \leq ct$, allora

$$F_2(P,t) \sim F_2(Q,t); \tag{2.5}$$

esiste $b > 0$ tale che:

$$Q(x, r/b) \subseteq B(x,r) \subseteq Q(x, br) \tag{2.6}$$

dove $Q(x,t) = [x_1 - t, x_1 + t] \times [x_2 - F_2(x,t), x_2 + F_2(x,t)]$.

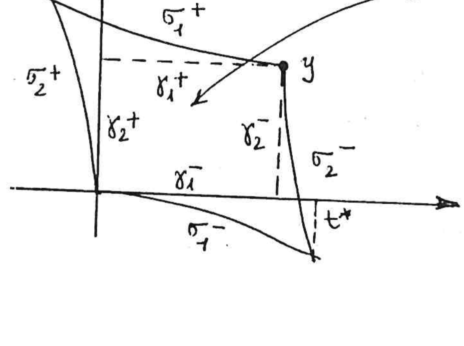
Siano ora $x, y \in \mathbf{R}^2$ tali che $y_2 = x_2 + F_2(x, |y_1 - x_1|)$. Senza ledere la generalità possiamo supporre $x = 0$. Poniamo ora:

$$\gamma_1^- = [0, (y_1, 0)] \qquad \gamma_+^- = [(0, y_2), y]$$
$$\gamma_2^- = [(y_1, 0), y] \qquad \gamma_2^+ = [0, (0, y_2)]$$
$$L_\pm = \gamma_1^\pm \cup \gamma_2^\pm .$$

Inoltre se $\delta > 0$ e $t^* = \sup\{t > y_1\,; -F((s,0), \delta s) < y_2 - F_2(y, \frac{1}{\delta}(s - y_1)) \forall s \in [y_1, t]\}$, poniamo

$$\sigma_1^- = \{(t, -F_2((t,0), \delta t), \ 0 \leq t \leq t^*\} \quad \sigma_2^- = \{(t, y_2 - F_2(y, (t - y_1)/\delta), \ y_1 \leq t \leq t^*\}.$$

Definendo σ_1^+, σ_2^+ in modo analogo, otteniamo:



(2.e)

Con calcoli laboriosi ma standard, si può provare che esistono delle costanti assolute (indipendenti cioè da x, y, δ) tali che

(2.7) $$\text{se } P \in L^-, \text{ allora } \rho(P,\sigma^-) \le c_1\, \delta \rho(P,\sigma^+);$$

(2.8) $$\text{se } P \in L^+, \text{ allora } \rho(P,\sigma^+) \le c_2\, \delta \rho(P,\sigma^-);$$

(2.9) $$\text{se } P \in \bar{D}, \text{ allora } \rho(P,\sigma^\pm) \sim \min\{\rho(P,x), \rho(P,y)\}.$$

Se $P \in \bar{D}$, poniamo ora

(2.10) $$d_\pm(P) = d(P,\sigma^\pm).$$

Se per semplicità assumiamo che ω sia continua, allora $d_\pm$ è Lipschitziana (e quindi derivabile q. o.). Inltre, se $P \in L^-$ e $P \notin \sigma^+$, risulta

$$\frac{d_-(P)}{d_+(P)} \le c_3\, \delta^\theta,$$

per un $\theta > 0$ opportuno; analogamente, se $P \in L^+$ e $P \notin \sigma^-$, allora

$$\frac{d_+(P)}{d_-(P)} \le c_4\, \delta^\theta,$$

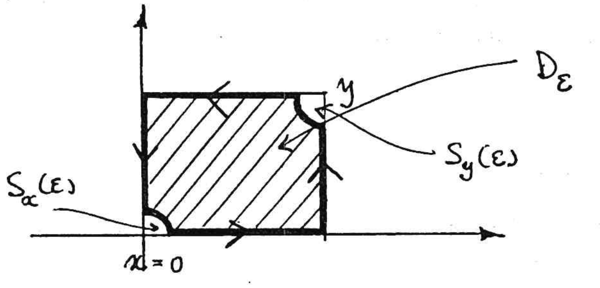
e quindi è possibile scegliere δ in modo che $(c_1 + c_4)\delta^\theta < \frac{1}{2}$. Sia ora ϕ una funzione $\mathbf{C}^\infty$ reale tale che $\phi(t) \equiv 1$ per $t \ge 2$, $\phi \equiv 1$ per $t \le \frac{1}{2}$, $0 \le \phi \le 1$; se $P \in \partial D$, poniamo

$$f(P) = \phi\left(\frac{d_+(P)}{d_-(P)}\right)$$

e quindi

$$f(P) \equiv 0 \text{ in } L^+ \text{ se } P \ne x, y,$$
$$f(P) \equiv 1 \text{ in } L^- \text{ se } P \ne x, y.$$

Consideriamo ora la regione D_ε così definita:



Se $g \in \mathbf{C}^1$ si ha allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} g\, df = g(y) - g(x);$$

d'altra parte, per il teorema di Stokes,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial D_\epsilon} g\, df\right| &= \left|\int_{D_\epsilon} dg \wedge df\right| \\
&\leq \int_{D_\epsilon} |g_1 f_2 - g_2 f_1|\, dz = \int_{D_\epsilon} |X_1 g X_2 f - X_2 g X_1 f| \frac{dz}{\lambda_2(z)} \\
&\int_D |X_1 g X_2 f| \frac{dz}{\lambda_2(z)} + |X_2 g X_1 f| \frac{dz}{\lambda_2(z)},
\end{aligned}
$$

dove $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \lambda_2 \partial_2$. D'altra parte

$$
\begin{aligned}
|X_j f| &\leq \left|\phi'\left(\frac{d_+}{d_-}\right) \frac{X_j d_+}{d_-}\right| + \left|\phi'\left(\frac{d_+}{d_-}\right) \frac{d_+}{d_-} \frac{X_j d_-}{d_-}\right| \\
&\leq \frac{1}{d_-} \{|X_j d_+| + |X_j d_-|\}.
\end{aligned}
$$

Ma

$$
\begin{aligned}
|X_j d_\pm(z)| &\leq \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t}\, d(\exp(tX_j)z, z) \\
&\leq c \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t}\, \delta(\exp(tX_j)z, z) \\
&\leq c \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(\int_{B(z,t)} (\omega\lambda_2)(\xi)\, d\xi\right)^{1/2} \qquad (\text{poichè } \rho(\exp(tX_j)z, z) \leq t) \\
&\leq c \limsup_{t \to 0+} \left(\frac{F_2(z,t)}{t}\right)^{1/2} \left(\fint_{B(z,t)} (\omega\lambda_2)(\xi)\, d\xi\right)^{1/2} \\
&= c_8\, \lambda_2(z) \omega^{1/2}(z).
\end{aligned}
$$

D'altra parte, combinando (2.9) e (2.10) e utilizzando il fatto che $\omega\lambda_2 \in A_\infty$, si può provare che

$$
d_-(z) \geq c \min \left\{ \left(\int_{B(x,\rho(x,z))} (\omega\lambda_2)\, d\xi\right)^{1/2}, \left(\int_{B(y,\rho(z,y))} (\omega\lambda_2)\, d\xi\right)^{1/2} \right\}, \tag{2.11}
$$

e quindi, sostituendo sopra,

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &\leq c \int_D |\nabla_\lambda g| \omega^{1/2}(z). \\
&\left\{ \left(\int_{B(x,\rho(x,z))} (\omega\lambda_2)\, d\xi\right)^{-1/2} + \left(\int_{B(y,\rho(z,y))} (\omega\lambda_2)\, d\xi\right)^{-1/2} \right\} dz.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Se ora $\beta \in (0,1)$ è fissato, per ogni x è possibile determinare un sottoinsieme $Q^\beta(x,R) \subseteq Q(x,R)$ tale che la (2.12) sia ancora valida se $y \in Q^\beta(x,R)$ (con una costante $c = c(\beta)$) e inoltre, se $E \subseteq Q(x,R)$, $|E| \geq \beta |Q(x,R)|$, risulta $|E \cap Q^\beta(x,R)| \geq \frac{\beta}{2}|Q(x,R)|$.

Possiamo ora procedere con una tecnica già utilizzata precedentemente, se $g \in \mathbf{C}^1$ è tale che $|\{y \in Q(\bar{x},R)\,;\, u(y) = 0\}| \geq \beta\, |Q(\bar{x},R)|$, integrando la (2.12) rispetto a $y \in \{y \in Q(\bar{x},R)\,;\, u(y) = 0\}$, si ottiene la formula di rappresentazione

$$\begin{aligned}|g(x)| \leq c(\beta) &\left\{ \int_{B(\bar{x},cR)} |\nabla_\lambda g| \omega^{1/2}(z) \left(\int_{B(x,\rho(x,z))} (\omega \lambda_2)\, d\xi \right)^{-1/2} dz \right.\\ &\left. + \left(\int_{B(\bar{x},cR)} |\nabla_\lambda g| \omega^{1/2}(z) \left(\int_{B(\bar{x},cR)} (\omega\lambda_2)\, d\xi \right)^{-1/2} dz \right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. La formula (2.13) è ora utilizzabile per provare una disuguaglianza di Sobolev per funzioni che si annullano su una parte significativa di una sfera e quindi ([KS], [FS], [F]) una disuguaglianza di Poincaré per funzioni arbitrarie. Poichè il secondo termine in (2.13) è L^p-regolarizzante, basterà limitarsi a considerare il primo termine. Come già accennato, è naturale pensare alla misura $\omega^{1/2}(x)dx$ come alla misura ambiente rispetto alla quale verranno formulate le ipotesi sui pesi; in altri termini vogliamo ora formulare – in termini della misura $\omega^{1/2}(x)dx$ – delle ipotesi su una coppia di pesi (u,v) in modo che$u = \omega_0$ e $v = \omega_1$ verifichino (1.a).

Poichè (considerando solo il termine singolare in (2.13) e ponendo

$$B(\bar{x},R) = B_0, \quad B(\bar{x},cR) = cB_0, \quad k(x,z) = \left(\int_{B(x,\rho(x,z))} (\omega\lambda_2)\, d\xi \right)^{1/2},$$

si ha:

$$\left(\fint_{B_0} |g(x)|^q u(x)\, dx \right)^{1/q} \leq c(\beta) \int_{cB_0} \left[\int_{cB_0} |\nabla_\lambda g(z)| k(x,z) \omega^{1/2}\, dz \right]^q \frac{u(x)\omega(x)^{-1/2}}{u(B_0)}\, \omega^{1/2}(x)\, dx,$$

il risultato cercato seguirà utilizzando i risultati di continuit à per operatori integrali singolari in spazi di tipo omogeneo di Sawyer e Wheeden [SW] per il nucleo k, i pesi $v(x)$ e $u(x)\omega^{1/2}(x)/u(B_0)$ e la misura ambiente $\omega^{1/2}(x)dx$. Così se

(3.1) $u(x)dx$ è una misura doubling;
(3.2) $v\omega^{-1/2} \in A_p(\mathbf{R}^2, \rho, \omega^{1/2}(x)dx)$;
(3.3) per ogni $B_r = B(y,r) \subseteq cB_0$, risulta

$$\frac{r}{r_0} \left(\frac{u(B_r)}{u(B_0)} \right)^{1/q} \leq c \left(\frac{v(B_r)}{v(B_0)} \right)^{1/p},$$

allora la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré è provata

BIBLIOGRAFIA

[CW] S. Chanillo e R.L. Wheeden, *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for the Peano maximal function*, Amer. J. Math **107** (1985), 1191–1226.

[CRS] F. Chiarenza, A. Rustichini, R. Serapioni, *De Giorgi-Moser theorem for a class of degenerate non-uniformly elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 635–662.

[DS] G. David e S. Semmes, *Strong A_∞ weights, Sobolev inequalities and quasiconformal mappings*, Analysis and Partial Differential Equations (C. Sadosky, ed.), Marcel Dekker, 1990, pp. 101–111.

[FKS] E. Fabes, C. Kenig et R. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **7** (1982), 77–116.

[FL1] B. Franchi et E. Lanconelli, *Hölder regularity for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **(IV) 10** (1983), 523–541.

[FL2] B. Franchi e E. Lanconelli, *Stime sub-ellittiche e metriche riemanniane singolari*, Seminario di Analisi Matematica dell'Istituto Matematico dell'Università di Bologna, Lo Scarabeo, Bologna, 1983.

[FS] B. Franchi e R. Serapioni, *Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **(IV) 14** (1987), 527–568.

[F] B. Franchi, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities and pointwise estimates for a class of degenerate elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 125–158.

[FGW] B. Franchi, C. Gutierrez, R.L. Wheeden, in preparazione.

[FG] B. Franchi e S. Gallot, in preparazione.

[J] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander condition*, Duke Math. J. **53** (1986), 503–523.

[KS] D. Kinderleher e G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, 1980.

[NSW] A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[SW] E.T. Sawyer e R.L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on homogeneous spaces*, Amer. J. Math, in corso di stampa.

[S] S. Semmes, *Bilipschitz mappings and strong A_∞ weights*, in corso di stampa.

[T] G. Talenti, *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **39** (1969), 171–185.

[W] R.L. Wheeden, *A characterization of some weighted norm inequalities for the fractional maximal function*, in corso di stampa.